УДК 514.76

О ПАРЕ *m*-ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ СЕТЬЮ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: svr@hm.tpu.ru

Изучается две m-мерные поверхности в n-мерном проективном пространстве, между точками которых установлено точечное соответствие. На поверхностях задается сеть линий. Рассматриваются некоторые геометрические образы, связанные с сетью. Рассмотрение всюду имеет локальный характер. Все рассматриваемые в данной работе функции предполагаются аналитическими.

Многомерная дифференциальная геометрия различных многообразий давно привлекает внимание математиков в связи с различными её приложениями. В частности, изучаются многомерные поверхности и сети линий на них [1, 2]. В середине двадцатого века стали изучать пары поверхностей и различные соответствия между ними [3]. Данная работа принадлежит этому направлению и посвящена паре m-мерных поверхностей в n-мерном проективном пространстве.

1. Пусть S_m^1 и S_m^2 – две поверхности в проективном пространстве P_n и Π: $S_m^1 \to S_m^2$ – гладкое взаимнооднозначное соответствие между ними.

Присоединим к рассматриваемой паре m-поверхностей некоторый проективный репер $R=\{A_0,A_1,\ldots,A_n\}$ с деривационными формулами $dA_I=\omega_I^J A_J$ $(I,J,\ldots=0,1,\ldots,n)$ и структурными уравнениями $D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J$, причём $\omega_I^I=0$.

Проведём следующую частичную канонизацию репера: точки A_0 и $A_n=\Pi(A_0)$ поместим в соответствующие точки поверхностей S_m^1 и S_m^2 пары; точки $A_1,\ldots,A_m$ – в касательную m-плоскость $L_m^1=(A_0,\ldots,A_m)$ к m-поверхности S_m^1 в точке A_0, а точки $A_{n-m},\ldots,A_{n-1}$ – в касательную m-плоскость $L_m^2=(A_{n-m},\ldots,A_{n-1})$ к m-поверхности S_m^2 в точке A_n.

Точечное соответствие Π индуцирует проективное соответствие между связками касательных направлений, ассоциированных двум соответствующим точкам A_0 и A_n.

Выберем репер пары так, чтобы направления A_0A_i соответствовали в этом проективитете направлениям A_nA_{n-i}. Тогда основные уравнения нашей задачи принимают вид

$$\omega_0^\alpha=0,\quad \omega_0^n=0,\quad \omega_0^{n-i}=0, \tag{1}$$

$$\omega_n^\alpha=0,\quad \omega_n^0=0,\quad \omega_n^i=0,$$
$$\omega_0^i=\omega_n^{n-i}. \tag{2}$$

$(i,j,\ldots=1,2,\ldots,m;\ a,b,c,\ldots=2,3,\ldots,m;$
$\alpha,\beta,\ldots=m+1,\ m+2,\ \ldots,n-m-1).$

Для краткости будем обозначать в дальнейшем $\omega_0^i=\omega_n^{n-i}$.

Продолжая уравнения (1, 2), получаем

$$\omega_i^\alpha=\Lambda_{ij}^\alpha\omega^j,\omega_i^n=\Lambda_{ij}^n\omega^j,\omega_k^{n-i}=\Lambda_{kj}^{n-i}\omega^j,$$

$$\omega_{n-i}^0=\Lambda_{n-i,j}^0\omega^j,\omega_{n-k}^i=\Lambda_{n-k,j}^i\omega^j,\omega_{n-i}^\alpha=\Lambda_{n-i\,j}^\alpha\omega^j,$$

$$\omega_{n-j}^{n-i}-\omega_j^i+\delta_j^i(\omega_0^0-\omega_n^n)=A_{jk}^i\omega^k,$$

$$\nabla\Lambda_{ij}^\alpha=\Lambda_{ijk}^\alpha\omega^k,\quad \nabla\Lambda_{ij}^n+\Lambda_{ij}^\alpha\omega_\alpha^n+\Lambda_{ij}^{n-k}\omega_{n-k}^n=\Lambda_{ijk}^n\omega^k,$$

$$\nabla\Lambda_{kj}^{n-i}+\Lambda_{kj}^\alpha\omega_\alpha^{n-i}+\Lambda_{kj}^{n-l}\omega_{n-l}^{n-i}=\Lambda_{kjl}^{n-i}\omega^l,$$

$$\nabla\Lambda_{n-i,j}^\alpha=\Lambda_{n-i,jk}^\alpha\omega^k, \tag{3}$$

$$\nabla\Lambda_{n-i,j}^0+\Lambda_{n-i,j}^k\omega_k^0+\Lambda_{n-i,j}^\alpha\omega_\alpha^0=\Lambda_{n-i,jk}^0\omega^k,$$

$$\nabla\Lambda_{n-k,j}^i+\Lambda_{n-k,j}^\alpha\omega_\alpha^i-\Lambda_{n-l,j}^i\omega_{n-k}^{n-l}=\Lambda_{n-k,jl}^i\omega^l,$$

$$\nabla A_{jk}^i+\delta_j^i(\omega_k^0-\omega_{n-k}^n)-\delta_k^i(\omega_{n-j}^n-\omega_j^0)-$$
$$-\Lambda_{jk}^\alpha\omega_\alpha^i+\Lambda_{n-j,k}^\alpha\omega_\alpha^{n-i}=A_{jkl}^i\omega^l. \tag{4}$$

Здесь символ ∇ обозначает оператор ковариантного дифференцирования.

Из уравнений (3) следует, что системы функций Λ_{ij}^α и $\Lambda_{n-i,j}^\alpha$ являются тензорами в смысле Г.Ф. Лаптева [4, 5].

Продолжая уравнения (3, 4), получаем систему дифференциальных уравнений последовательности фундаментальных объектов: Λ_{ij}^α, Λ_{ij}^n, Λ_{ij}^{n-k}, $\Lambda_{n-i,j}^\alpha$, $\Lambda_{n-i,j}^0$, $\Lambda_{n-i,j}^i$, A_{jk}^i; Λ_{ijk}^α, Λ_{ijk}^n, Λ_{kjl}^{n-i}, $\Lambda_{n-i,jk}^\alpha$, $\Lambda_{n-i,jk}^0$, $\Lambda_{n-i,jl}^i$, A_{jkl}^i; Λ_{ijkl}^α, Λ_{ijkl}^n,...

2. Пусть определены первые и вторые нормали поверхностей S_m^1 и S_m^2 [1, 3], которые определяются точками

$$L_{n-m}^1=(A_0,A_n,A_{n-i},A_\alpha),\quad L_{m-1}^1=(A_1,A_2,\ldots,A_m)$$

и

$$L_{n-m}^2=(A_n,A_0,A_i,A_\alpha),\quad L_m^2=(A_{n-m},A_{n-m+1},\ldots,A_{n-1}),$$

соответственно.

Пусть на поверхности S_m^1 задано одномерное распределение Δ_1 и дополнительное к нему распределение Δ_{m-1}, тогда, если фиксированы главные параметры, вершина A_1 может перемещаться по прямой $\Delta_1(A_0)$, а вершины A_a – в плоскости $\Delta_{m-1}(A_0)$.

Следовательно, формы ω_1^a и ω_a^1 являются главными

$$\omega_1^a=\Lambda_{1i}^a\omega^i,\omega_a^1=\Lambda_{ai}^1\omega^1. \tag{5}$$

Продолжая уравнения (5), получаем

$$\nabla\Lambda_{ai}^1-\delta_i^1\omega_a^0=\Lambda_{aij}^1\omega^j,$$

$$\nabla\Lambda_{1i}^a-\delta_i^a\omega_a^0=\Lambda_{1ij}^a\omega^j.$$

Следовательно, каждая из систем функций Λ_{1ij}^a и Λ_{aij}^1 образует квазитензор [4].

На прямой $\Delta_1(A_0)$ найдём точку $F=\lambda A_0+A_1$ такую, чтобы при смещении точки A_0 в направлении $\Delta_{m-1}(A)$ смещение точки F не выходило из $(n-m+1)$-плоскости $L_{n-m+1}=(A_0,A_1,A_{m+1},...,A_n)$. Соотношение

$$dF \in L_{n-m+1}(A) \quad (6)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda\omega^a + \omega_1^a = 0.$$

Так как соотношение (6) должно выполняться при $\omega^1=0$, то, используя уравнения (5), получаем

$$(\Lambda_{1a}^b + \lambda\delta_a^b)\omega^a = 0. \quad (7)$$

Поскольку не все формы ω^a одновременно равны нулю, то λ должно удовлетворять уравнению

$$\det\left\|\Lambda_{1a}^b + \lambda\delta_a^b\right\| = 0. \quad (8)$$

Будем предполагать, что все корни уравнения (8) простые, вещественные. Тогда система уравнений (7) определяет $m-1$ линейно независимых одномерных распределений Δ_1^a, принадлежащих распределению Δ_m. Интегральные кривые распределений Δ_1,Δ_1^a образуют на поверхности S_m^1 сеть линий, которую обозначим Σ_m. Располагая каждую из вершин A_a репера на соответствующей прямой $\Delta_1^a(A_0)$, мы получаем $\Lambda_a^b=0$, $a\neq b$. На прямой $\Delta_1(A_0)$ мы получим $m-1$ точку

$$F_1^a = \Lambda_{1a}^a A_0 + A_1.$$

(по a не суммировать)

3. Точка F_i^j $(i\neq j)$ называется псевдофокусом [7] прямой A_0A_i, если при смещении точки A_0 в направлении A_0A_j касательная к линии, описываемой точкой F_i^j принадлежит гиперплоскости

$$L_{n-1}^j = (A_0A_1...A_{j-1}A_{j+1}...A_m...A_n).$$

Пусть точка

$$F_i^j = x_i^j A_0 + A_i \quad (i \neq j)$$

является псевдофокусом прямой A_0A_α. Тогда из

$$(dF_i^j, L_{n-1}^j)|_{\omega^1=\omega^2=\dots=\omega^{j-1}=\omega^{j+1}=\dots=\omega^m=0}=0$$

получаем

$$[x_i^j\omega^j + \omega_i^j, \omega^1, \omega^2, ..., \omega^{j-1}, \omega^{j+1}, ..., \omega^m] = 0.$$

Отсюда

$$x_i^j=-\Lambda_{ij}^j \ (i\neq j, \text{ по } j \text{ не суммировать})$$

и

$$F_i^j=-\Lambda_{ij}^j A_0+A_i \ (\text{по } j \text{ не суммировать}). \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что точка F_1^a является псевдофокусом прямой A_0A_1, соответствующим направлению $\Delta_1^a(A_0)$. Точки

$$F_i = \frac{1}{m-1}\Lambda_{ij}^j A_0 + A_i \ (\text{по } j \text{ суммировать})$$

называются гармоническими полюсами точки A_0 относительно псевдофокусов прямой A_0A_i.

Если $\Lambda_{ij}^j=0$ (по j суммировать), то вершины A_i репера помещены в гармонические полюса прямых A_0A_i.

В силу заданного проективитета Π между парами поверхностей S_m^1 и S_m^2, на поверхности S_m^2 имеют место аналогичные построения, которые здесь приводить не будем.

4. Обозначим через L_{2m+1} $(2m+1)$-мерную плоскость, натянутую на касательные m-плоскости обеих поверхностей пары. Заметим, что L_{2m+1} является касательным $(2m+1)$-мерным подпространством m-параметрического многообразия, элементом которого является прямая A_0A_n, т.е. содержит прямую A_0A_n и всю ее первую дифференциальную окрестность. Пересечение оснащающих плоскостей каждой из поверхностей пары обозначим L_{n-2m-2}. Эта плоскость является оснащающей плоскостью пары m-поверхностей. Оснащающие плоскости поверхностей S_m^1 и S_m^2 могут быть заданы соответственно уравнениями

$$x^0 - \lambda_{i_1}^0 x^{i_1} = 0; x^i - \lambda_{i_1}^i x^{i_1} = 0; \quad (10)$$

$$x^n - \lambda_{i_2}^n x^{i_2} = 0, x^{i_3} - \lambda_{i_2}^{i_3} x^{i_2} = 0, \quad (11)$$

а нормали первого рода поверхностей S_m^1 и S_m^2 могут быть определены как

$$x^i - \lambda_{i_1}^i x^{i_1} = 0; \quad (12)$$

$$x^{i_3} - \lambda_{i_2}^{i_3} x^{i_2} = 0. \quad (13)$$

$$(i_1,j_1,...=m+1,...,n;\ i_2,j_2,...=0,1,2,...,n-m-1;$$
$$i_3,j_3,...=n-m,...,n-1).$$

Здесь объекты оснащения $(\lambda_{i_1}^1,\lambda_{i_1}^i)$ $\{(\lambda_{i_2}^n,\lambda_{i_2}^{i_3})\}$ охватываются фундаментальным геометрическим объектом пары m-поверхностей и удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\lambda_{i_1}^i = -\omega_{i_1}^i + \lambda_{i_1 j}^i\omega^j,$$

$$\nabla\lambda_{i_2}^{i_3} = -\omega_{i_2}^{i_3} + \lambda_{i_2 n+j}^{i_3}\omega^j,$$

$$\nabla\lambda_{i_2}^n = -\lambda_{i_2}^{i_3}\omega_{i_3}^n - \omega_{i_2}^n - \lambda_{i_2}^n\omega_n^n + \lambda_{i_2 n+j}^n\omega^j,$$

$$\nabla\lambda_{i_1}^0 = -\lambda_{i_1}^0\omega_0^0 - \lambda_{i_1}^i\omega_i^0 - \omega_{i_1}^0 + \lambda_{i_1 j}^0\omega^j.$$

Компоненты $\lambda_{i_1}^1(\lambda_{i_2}^{i_3})$ объекта оснащения образуют самостоятельный подобъект, который определяет поле инвариантных $(n-m)$-мерных плоскостей, являющихся полем нормалей первого рода поверхности $S_m^1(S_m^2)$.

Из (10)–(13) следует, что $(n-2m-2)$-плоскость L_{n-2m-2} задается уравнениями (12), (13), а $(n-2m)$-плоскость L_{n-2m}, инвариантно присоединенная к паре и имеющая с $(2m+1)$-плоскостью L_{2m+1} общие точки A_0 и A_n, задается уравнениями (10), (11).

5. К поверхностям пары могут быть присоединены поля гиперквадрик, имеющих с поверхностями S_m^1 и S_m^2 соприкосновение второго порядка

$$a_{ij}x^i x^j - 2b_{i_1}x^0 x^{i_1} + 2b_{i_1}c_i^{i_1}x^i x^{i_1} + b_{i_1}c_{j_1k_1}^{i_1}x^{j_1}x^{k_1} = 0; \quad (14)$$

$$a_{i_3j_3}x^{i_3}x^{j_3} - 2b_{i_2}x^n x^{i_2} + 2b_{i_2}c_{i_3j_2}^{i_2}x^{i_3}x^{j_2} +$$
$$+ b_{i_2}c_{j_2k_2}^{i_2}x^{j_2}x^{k_2} = 0, \quad (15)$$

где

$$b_{i_1} = \lambda^{i}_{i_1 i} + m\lambda^{0}_{i_1} - \Lambda^{j_1}_{ij}\lambda^{i}_{j_1}\lambda^{j}_{i_1},$$

$$b_{i_1} = \lambda^{i_3}_{i_1 i_3} + m\lambda^{n}_{i_1} - \Lambda^{j_1}_{i_3 j_3}\lambda^{i_3}_{j_1}\lambda^{j_3}_{i_1},$$

$$a_{ij} = b_{i_1}\Lambda^{i_1}_{ij}, \quad a_{i_3 j_3} = b_{i_1}\Lambda^{i_1}_{i_3 j_3}.$$

Если считать, что

$$c^{j_1}_{ii_1} = \Lambda^{j_1}_{ij}\lambda^{j}_{i_1} - \delta^{j_1}_{i_1}\lambda^{0}_{i}, \quad c^{k_1}_{i_1 j} = \Lambda^{i_1}_{ij}\lambda^{i}_{i_1}\lambda^{j}_{j_1} - \lambda^{0}_{(i_1}\delta^{k_1}_{j_1)} + c^{k_1}_{i(i_1}\lambda^{i}_{j_1)},$$

$$c^{i_1}_{i_3 j_1} = \Lambda^{i_1}_{i_3 j_3}\lambda^{j_3}_{j_1} - \delta^{i_1}_{j_1}\lambda^{n}_{i_3},$$

$$c^{k_1}_{i_1 j_1} = \Lambda^{k_1}_{i_3 j_3}\lambda^{i_3}_{i_1}\lambda^{j_3}_{j_1} - \lambda^{n}_{(i_1}\delta^{k_1}_{j_1)} + c^{k_1}_{i_3(i_1}\lambda^{i_3}_{j_1)},$$

то из (14), (15) получаем единственные соприкасающиеся гиперквадрики поверхностей S^1_m и S^2_m, соответственно.

Эти гиперквадрики обладают следующим свойством: поляра первой (второй) нормали поверхности $S^1_m(S^2_m)$ относительно гиперквадрики (14), (15) проходит через вторую (первую) нормаль поверхности $S^1_m(S^2_m)$.

Следовательно, между нормалями поверхности $S^1_m(S^2_m)$ гиперквадрика (14), (15) устанавливает квазиполярное соответствие [8, 9].

В m-плоскостях L^1_m и L^2_m тензоры $a_{ij}, a_{i_3 j_3}$ и квазитензоры $\lambda^0_i, \lambda^n_{i_3}$ определяют соответственно квадрики

$$(a_{ij} + \lambda^{0}_{i}\lambda^{0}_{j})x^i x^j - 2\lambda^{0}_{i}x^i x^0 + (x^0)^2 = 0, \quad x^{i_2} = 0; \quad (16)$$

и

$$(a_{i_3 j_3} + \lambda^{n}_{i_3}\lambda^{n}_{j_3})x^{i_3} x^{j_3} - 2\lambda^{n}_{i_3}x^{i_3} x^n + (x^n)^2 = 0, \quad x^{i_2} = 0. \quad (17)$$

Полярой точки A_0 (A_n) относительно квадрики (27), (28) является вторая нормаль m-поверхности $S^1_m(S^2_m)$.

6. Точка $X=x^i(A_i+\lambda^0_i A_0)$, принадлежащая второй нормали L^1_{m-1} m-поверхности, S^1_m, вдоль 1-семейства

$$\omega^i = t^i\theta, \quad D\theta = \theta\Lambda\theta,$$

$$dt^i - t^i\omega^0_0 + t^j\omega^i_j = t^i_j\omega^j \quad (18)$$

описывает линию с касательной $TX(t)$. Линейное пространство, натянутое на L^1_{n-m} и $TX(t)$, пересекается с L^1_{n-m} в точке Y. Вдоль (18) точка Y описывает линию с касательной $TY(t)$. Линейное пространство, натянутое на L^1_{n-m} и $TY(t)$, пересекается с L^1_{m-1} в точке $Z=z^i(A_i+\lambda^0_i A_0)$, где

$$z^i = \{\delta^j_i(\lambda^0_{kp} - \lambda^0_k\lambda^0_p + \Lambda^l_{kp}\lambda^q_l\lambda^0_q) +$$

$$+\Lambda^{i_2}_{kp}(\lambda^i_{i_2 j} - \Lambda^{j_2}_{qj}\lambda^q_{i_2}\lambda^i_{j_2})\}t^j t^p x^k. \quad (19)$$

Соотношение (19) определяет проективное преобразование $(m-1)$-плоскости L^1_{m-1} в себя, которое определяется матрицей Π^j_i, где

$$\Pi^j_i = \{\delta^j_p(\lambda^0_{iq} - \lambda^0_i\lambda^0_q + \Lambda^{i_2}_{iq}\lambda^k_{i_2}\lambda^0_k) +$$

$$+\Lambda^{i_2}_{iq}(\lambda^j_{i_3 p} - \Lambda^{j_2}_{kp}\lambda^k_{i_2}\lambda^j_{j_2})\}t^p t^q.$$

Это преобразование будет преобразованием W, если $\Pi^i_i=0$.

Таким образом, в $(m-1)$-плоскости L^1_{m-1} мы получаем квадрику, каждой точке которой соответствует преобразование W $(m-1)$-плоскости L^1_{m-1} в себя [10]. Эту квадрику можно задать уравнениями

$$\{\lambda^0_{ij} - \lambda^0_i\lambda^0_j + \Lambda^{i_2}_{ij}\lambda^k_{i_2}\lambda^0_k +$$

$$+\Lambda^{i_2}_{pj}(\lambda^p_{i_2 i} - \Lambda^{j_2}_{kl}\lambda^k_{i_2}\lambda^p_{j_2})\}x^i x^j = 0,$$

$$x^{i_2} = 0, \quad x^0 - \lambda^0_i x^i = 0. \quad (20)$$

Квадрике (20) в m-плоскости L^1_m соответствует конус

$$\{\lambda^0_{ij} - \lambda^0_i\lambda^0_j + \Lambda^{i_2}_{ij}\lambda^k_{i_2}\lambda^0_k + \Lambda^{i_2}_{pj}(\lambda^p_{i_2 i} - \Lambda^{j_2}_{kl}\lambda^k_{i_2}\lambda^p_{j_2})\}x^i x^j = 0,$$

$$x^{i_2} = 0.$$

Аналогичный конус получаем в m-плоскости L^2_m.

7. Пусть дана точка $X=x^{i_1}(A_{i_1}+\lambda^0_{i_1}A_0+\lambda^i_{i_1}A_i)$, принадлежащая оснащающей плоскости L^1_{n-m-1} m-поверхности S^1_m. Пространство, натянутое на L^1_{n-m-1} и $TX(t)$, пересекается с L^1_m в точке

$$Y = (L^1_{n-m-1}, TX(t)) \cap L^1_m = y^0 A_0 + y^i(A_i + \lambda^0_i A_0).$$

Тогда

$$X^* = (L^1_m, TY(t)) \cap L^1_{n-m-1} = x^{*i_1}(A_{i_1} + \lambda^0_{i_1}A_0 + \lambda^i_{i_1}A_i),$$

где

$$x^{*i_1} = \Lambda^{i_1}_{ip}(\lambda^0_{j_1}\delta^i_j + \lambda^i_{j_1 j} - \Lambda^{k_1}_{kj}\lambda^k_{j_1}\lambda^i_{k_1})t^j t^p x^{j_1}. \quad (21)$$

Следовательно, мы получаем преобразование (21) $(n-m-1)$-плоскости L^1_{n-m-1} в себя, которое является преобразованием W, если

$$\Lambda^{i_1}_{ij}(\lambda^1_{i_1}\delta^i_k + \lambda^i_{i_1 k} - \Lambda^{j_1}_{pk}\lambda^p_{i_1}\lambda^i_{j_1})t^k t^j = 0.$$

Таким образом, мы получаем в m-плоскости L^1_m конус

$$\Lambda^{i_1}_{ij}(\lambda^0_{i_1}\delta^i_k + \lambda^i_{i_1 k} - \Lambda^{j_1}_{pk}\lambda^p_{i_1}\lambda^i_{j_1})x^j x^k = 0, \quad x^{i_1} = 0,$$

образующим которого соответствуют 1-семейства (18), дающие преобразования W $(n-m-1)$-плоскости L^2_{n-m-1} в себя.

Аналогично в m-плоскости L^2_m получаем конус

$$\Lambda^{i_2}_{i_3 j_3}(\lambda^n_{i_2}\delta^{i_3}_{k_3} + \lambda^{i_3}_{i_2 k_3} - \Lambda^{j_2}_{k_3 l_3}\lambda^{l_3}_{i_2}\lambda^{i_3}_{j_2})x^{j_3} x^{k_3} = 0, \quad x^{i_1} = 0,$$

образующим которого соответствуют преобразования W $(n-m-1)$-плоскости L^2_{n-m-1} в себя.

8. Рассмотрим точку $X=x^0A_0+x^{i_1}(A_{i_1}+\lambda^0_{i_1}A_0+\lambda^i_{i_1}A_i)$, принадлежащую $(n-m-1)$-плоскости L^1_{n-m}. Имеем вдоль (18)

$$Y = (L^1_{n-m}, TX(t)) \cap L^1_{m-1} = y^i(A_i + \lambda^0_i A_0),$$

где

$$y^i = x^0 t^i + x^{i_1}(\lambda^0_{i_1}\delta^i_j + \lambda^i_{i_1 j} - \Lambda^{j_1}_{jk}\lambda^k_{i_1}\lambda^i_{j_1})t^j.$$

Найдем

$$X^* = (L^1_{m-1}, TX(t)) \cap L^1_{n-m} =$$

$$= x^{*0}A_0 + x^{*i_1}(A_{i_1} + \lambda^0_{i_1}A_0 + \lambda^i_{i_1}A_i),$$

где

$$x^{*0} = (\lambda_{ij}^0 - \lambda_i^0 \lambda_j^0 - \Lambda_{ij}^{i_1} \lambda_{i_1}^0 + \Lambda_{ij}^{i_1} \lambda_{i_1}^k \lambda_k^0) t^i t^j x^0 +$$

$$+(\lambda_{i_1}^0 \delta_k^i + \lambda_{i_1 k}^i - \Lambda_{jk}^{j_1} \lambda_{i_1}^j \lambda_{j_1}^i)(\lambda_{ip}^0 - \lambda_i^0 \lambda_p^0 - \Lambda_{ip}^{j_1} \lambda_{j_1}^k \lambda_k^0) t^k t^p x^{i_1}, \quad (22)$$

$$x^{*i_1} = \Lambda_{ij}^{i_1} t^i t^j x^0 + \Lambda_{ij}^{i_1} (\lambda_{j_1}^0 \delta_k^i + \lambda_{j_1 k}^i - \Lambda_{pk}^{k_1} \lambda_{j_1}^p \lambda_{k_1}^i) t^j t^k x^{j_1}.$$

Следовательно, (22) определяет проективное преобразование (n–m)-плоскости L_{n-m}^1 в себя, которое будет преобразованием W, если

$$\{\lambda_{ij}^0 - \lambda_i^0 \lambda_j^0 + \Lambda_{ij}^{i_1} \lambda_{i_1}^k \lambda_k^0 + \Lambda_{ik}^{i_1} (\lambda_{i_1 j}^k - \Lambda_{pj}^{j_1} \lambda_{i_1}^p \lambda_{j_1}^k)\} t^i t^j = 0.$$

Таким образом, мы получаем в m-плоскости L_m^1 конус

$$\{\lambda_{ij}^0 - \lambda_i^0 \lambda_j^0 + \Lambda_{ij}^{i_1} \lambda_{i_1}^k \lambda_k^0 + \Lambda_{ik}^{i_1} (\lambda_{i_1 j}^k - \Lambda_{pj}^{j_1} \lambda_{i_1}^p \lambda_{j_1}^k)\} x^i x^j = 0,$$

$$x^{i_1} = 0,$$

образующим которого соответствуют 1-семейства (18), дающие преобразования W (n–m)-плоскости L_{n-m}^1 в себя. Аналогично получается преобразование (n–m)-плоскости L_{n-m}^2 в себя и соответствующий конус в m-плоскости L_m^2, образующим которого соответствуют преобразования W (n–m)-плоскости L_{n-m}^2 в себя.

9. Возьмем точку $X=x^0A_0+x^i(A_i+\lambda_i^0A_0)$, принадлежащую касательной m-плоскости к m-поверхности S_m^1. Имеем вдоль (18)

$$Y = (L_m^1, TX(t)) \cap L_{n-m-1}^1 = y^{i_1}(A_{i_1} + \lambda_{i_1}^0 A_0 + \lambda_{i_1}^i A_i),$$

где

$$y^{i_1} = \Lambda_{ij}^{i_1} x^i x^j,$$

тогда

$$X^* = (L_{n-m}^1, TY(t)) \cap L_m^1 = x^{*0} A_0 + x^{*i}(A_i + \lambda_i^0 A_0),$$

где

$$x^{*0} = \{\lambda_{i_1 j}^0 - \lambda_{i_1}^0 \lambda_j^0 - \lambda_i^0 \lambda_{i_1 j}^i +$$

$$+\Lambda_{pj}^{j_1} (\lambda_i^0 \lambda_{i_1}^p \lambda_{j_1}^i - \lambda_{i_1}^p \lambda_{j_1}^0)\} \Lambda_{kq}^{i_1} t^j t^q x^k, \quad (23)$$

$$x^{*i} = \Lambda_{kj}^{i_1} (\lambda_{i_1}^0 \delta_p^i + \lambda_{i_1 p}^i - \Lambda_{pq}^{j_1} \lambda_{i_1}^q \lambda_{j_1}^i) t^p t^j x^k.$$

Следовательно, (23) определяет проективное преобразование m-плоскости L_m^1 в себя, которое является преобразованием W, если

$$\Lambda_{ij}^{i_1} (\lambda_{i_1}^0 \delta_p^i + \lambda_{i_1 p}^i - \Lambda_{kp}^{j_1} \lambda_{i_1}^k \lambda_{j_1}^i) t^p t^j = 0$$

и мы получаем в m-плоскости L_m^1 конус

$$\Lambda_{ij}^{i_1} (\lambda_{i_1}^0 \delta_p^j + \lambda_{i_1 p}^i - \Lambda_{kp}^{j_1} \lambda_{i_1}^q \lambda_{j_1}^i) x^i x^j = 0,$$

$$x^{i_1} = 0,$$

образующим которого соответствуют 1-семейства, дающие преобразования W m-плоскости L_m^1 в себя. Аналогичное преобразование получается в L_m^2.

Теорема. Если преобразование (19), (22) является преобразованием W плоскости L_{m-1}^1(L_{n-m}^1) в себя, то и преобразование (22), (19) является преобразованием W плоскости L_{n-m}^1(L_{m-1}^1) в себя.

Если преобразование (21) является преобразованием W плоскости L_{n-m-1}^1 в себя, то преобразование (23) является преобразованием W плоскости L_m^1 в себя и наоборот, если преобразование (23) является преобразованием W плоскости L_m^1 в себя, то (21) является преобразованием W плоскости L_{n-m-1}^1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Итоги науки. Сер. Геометрия. – 1965. – С. 138–164.
2. Остиану Н.М. Инвариантное оснащение поверхности, несущей сеть // Известия вузов. Математика. – 1970. – № 7. – С. 72–82.
3. Болодурин В.С. О точечных соответствиях между многомерными поверхностями проективных пространств // Известия вузов. Математика. – 1975. – № 18. – С. 11–23.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Московского математического общества. – 1953. – № 2. – С. 275–382.
5. Лучинин А.А., Князева О.Г. Связности, ассоциированные с парой m-поверхностей // Прогрессивные технологии и экономика в машиностроении: Сб. трудов Всеросс. научно-практ. конф. – Юрга, 2003. – С. 314–315.
6. Лучинин А.А. О геометрии пары m-поверхностей в проективном пространстве P_n // Геометрический сборник. – 1977. – Вып. 18. – Томск: Изд-во Томск. ун-та. – С. 33–46.
7. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Известия вузов. Математика. – 1966. – № 2. – С. 9–19.
8. Luchinin A.A. On a class of the projective fibres // Proc. 5th Korea-Russia Intern. Symp. on Science and Technology. – Tomsk, 2001. – V. 2. – P. 235–238.
9. Остиану Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Труды геометрического семинара. – ВИНИТИ АН СССР. – 1971 – Т. 3. – С. 95–114.
10. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Об отображении полей двумерных площадок L_2^1 и L_1^2, инвариантно определённых на многообразии $V_{1,2}^{n+1}$ // В сб. трудов 8 Корейско-русского Междунар. симпозиума по науке и технике. – 2004. – Т. 2. – С. 159–160.